

1st Lecture of Operation Research 2

Duality and sensitivity analysis:

Primal Problem:

$$\text{Max(Min)} Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

Subject to :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = \text{or } \leq \text{ or } \geq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

In standard form :

$$\text{Max(Min)} Z = \sum_{j=1}^N c_j x_j$$

Subject to :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

Note That:

If the primal problem is Max then it becomes Min in Dual problem.

Every constraint in Primal correspond two variables in dual.

Every variable in Primal correspond constraint in dual.

Dual Problem:

$$\text{Min(Max)} W = \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

Subject to:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

Example 1 :

Find dual for this primal problem :

$$\text{Max } Z = 5 X_1 + 12 X_2 + 4 X_3$$

Subject to :

$$X_1 + 2 X_2 + X_3 \leq 10$$

$$2 X_1 - X_2 + 3 X_3 = 8$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

First step in solution to get the standard form

اول حاجة هجيب **standard form** وهى انى اخلى كل الـ **Constraint** على هيئة **Equality equations** هبدأ لو عندى الـ **Constraint** \leq هبدأ أضيف S_1 طب لو \geq يبقى هطرح منه S طب لو هو فى صورة **Equality Equation** زى الـ **constraint** التانى اللى عندى فى المسألة يبقى هسيبه زى ما هو.

وبعد كده طبعا هزود الأسات اللى انا هضيفها فى **objective fun** بمعامل صفر

$$\text{Max } Z = 5 X_1 + 12 X_2 + 4 X_3 + 0 S_1$$

S.T:

$$1 X_1 + 2 X_2 + X_3 + S_1 = 10$$

كان عندى \leq علشان كده زودت S علشان يبقى الطرف الشمال مساوى للطرف اليمين

$$2 X_1 - X_2 + 3 X_3 = 8$$

هى جاهزة مش محتاجة تحويل

$$X_1, X_2, X_3, S_1 \geq 0$$

Dual :

$$\text{Min } Z = 10 Y_1 + 8 Y_2$$

لو المسألة عندى **Max** يبقى فى الـ **Dual** هتبقى **Min** ولو المسألة عندى فى الـ **Primal** فيها **2 Constraint** يبقى الـ **Dual** هيبقى فيها **2 variables** اللى هما عندى Y_1, Y_2 وبجيب معاملات متغيرات الـ **obj. fun.** من الـ **R.H.S** بتاع الـ **Constraint** اللى موجودين عندى فى المسألة.

S.T:

عندى **4 Variables** فى المسألة فى الـ **Primal** X_1, X_2, X_3, S_1 يبقى هيبقى عندى **4 Constraints**

$$1 Y_1 + 2 Y_2 \geq 5$$

المعاملات 1, 2 بتوع الـ **Variables** جُم منين هما معاملات الـ X_1 فى الـ **Constraints** اللي عندى فى المسألة
 طب ليه أختارت \geq علشان المسألة **Max** يبقى هختار \geq طب لو كانت **Min** هختار \leq .. طبعا **Max** او **Min** دى اللي
 فى أصل المسألة اللي أنا واخدها .

الـ **R.H.S** جيه منين .. هو معامل الـ X_1 فى الـ **Objective fun.**

وهكذا بقى ..

$$2 Y_1 - 1 Y_2 \geq 12$$

$$Y_1 + 3 Y_2 \geq 4$$

$$Y_1 \geq 0$$

Y_2 is Unrestricted

يعنى مش محدد بقيمة

أنما الـ Y_1 هبقى Restricted to non-negative values لانى حدد ان قيئه هتبقى أكبر من او يساوى الصفر فى الـ
 Constraint الاخير $Y_1 \geq 0$

يبقى فى المسألة دى لما كان عندى equality constraint ادانى Unrestricted Dual Variable اللي هو Y_2

Then every equality constraint leads to unrestricted dual variable.

Example 2:

Find dual for this primal problem :

$$\text{Min } Z = 15 X_1 + 12 X_2$$

S.T:

$$X_1 + 2 X_2 \geq 3$$

$$2 X_1 - 4 X_2 \leq 5$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

نفس الحل بالظبط بس بالعكس المرة اللي فاتت كانت المسألة **Max** ودى **Min**

Standard form:

$$\text{Min } Z = 15 X_1 + 12 X_2 - 0 S_1 + 0 S_2$$

S.T:

$$X_1 + 2 X_2 - S_1 = 3$$

$$2 X_1 - 4 X_2 + 0 S_1 + S_2 = 5$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$$

Dual:

$$\text{Max } Z = 3 Y_1 + 5 Y_2$$

S.T:

$$Y_1 + 2 Y_2 \leq 15$$

$$2 Y_1 - 4 Y_2 \leq 12$$

$$-Y_1 + 0 Y_2 \leq 0 \rightarrow -Y_1 \leq 0$$

$$0 Y_1 + Y_2 \leq 0 \rightarrow Y_2 \leq 0$$

